

Universidad
Rey Juan Carlos

1

Modelos en Variables de Estado

Juan Antonio Hernández Tamames,
Susana Borromeo
Curso 2014-2015

Control y Automatización

Universidad
Rey Juan Carlos

Teoría de Control Moderna

2

- **Teoría de control clásica** basada en la relación entrada-salida o función de transferencia. Enfoque en el dominio de la frecuencia.
- **Teoría de control moderna** se basa en el concepto de *estado*. Basada en la descripción de las ecuaciones de un sistema en términos de n ecuaciones diferenciales de primer orden, que se combinan en una ecuación diferencial matricial de primer orden. Se aplica a sistemas con entradas y salidas múltiples, que pueden ser o no lineales. Enfoque en el dominio del tiempo. La formulación matricial simplifica la representación matemática y facilita la resolución por computador usando herramientas tipo Matlab.
- **Teoría de control robusto** utiliza la hipótesis de que los modelos que se utilizan en el diseño de los sistemas de control tienen errores de modelado. Basada en los análisis de respuesta en frecuencia y en el dominio del tiempo.

Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

Teoría de Control Moderna

3

- Conceptos de Controlabilidad y Observabilidad. [Kalman]
- Controlador en variables de estado que opera sobre la información disponible en forma de medida.
- Observador: sistema dinámico utilizado para estimar el estado de otro sistema dinámico dado un conocimiento sobre las entradas al sistema y las salidas medidas al sistema.

A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems¹

R. E. KALMAN
Research Institute for Advanced Study,²
 Baltimore, Md.

The classical filtering and prediction problem is re-examined using the Bode-Shannon representation of random processes and the "state transition" method of analysis of dynamic systems. New results are:
 (1) *The formulation and methods of solution of the problem apply without modification to stationary and nonstationary statistics and to growing-memory and infinite-memory filters.*
 (2) *A nonlinear difference (or differential) equation is derived for the covariance matrix of the optimal estimation error. From the solution of this equation the coefficients of the difference (or differential) equation of the optimal linear filter are obtained without further calculations.*
 (3) *The filtering problem is shown to be the dual of the noise-free regulator problem. The new method developed here is applied to two well-known problems, confirming and extending earlier results.*
The discussion is largely self-contained and proceeds from first principles; basic concepts of the theory of random processes are reviewed in the Appendix.

Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

Modelo basado en Variables de Estado

4

- Es útil cuando las ec. Diferenciales que describen el sistema son de alto orden.
- **Consiste en realizar cambios de variable de modo que resulte un sistema de ecuaciones diferenciales donde todas las ecuaciones sean de orden 1.**
- A partir de dicho sistema se puede deducir el grafo de flujo.
- A partir del grafo de flujo se puede obtener la función de transferencia en el dominio de Laplace.
- Las funciones de transferencia de alto orden pueden representarse, también en forma de grafo y, a partir de él, obtener las ecuaciones diferenciales
- La formulación matricial es útil cuando la resolución es por computador usando herramientas tipo Matlab.

Control y Automatización

 Universidad Rey Juan Carlos

Términos y Conceptos

5

- **Estado.** El estado de un sistema dinámico es el conjunto más pequeño de variables, denominadas *variables de estado*, de modo que el conocimiento de esas variables en t_0 junto con el conocimiento en la entrada para $t \geq t_0$ determina por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo $t \geq t_0$
- Las variables de estado no necesitan ser cantidades medibles u observables físicamente
- **Vector de estado.** Vector cuyos n componentes son las n variables de estado que describen por completo el comportamiento de un sistema
- **Espacio de Estados.** Cualquier sistema puede representarse mediante un punto del espacio de estados

Control y Automatización

 Universidad Rey Juan Carlos

Términos y Conceptos

6

- **Ecuaciones en el espacio de estados.** Variables de entrada, variables de salida y variables de estado.
- El sistema dinámico debe incorporar elementos que memoricen los valores de la entrada para $t \geq t_1$. Las salidas de los integradores definen el estado interno del sistema dinámico, es decir, funcionan como variables de estado.

Control y Automatización

7

Universidad Rey Juan Carlos

Términos y Conceptos

Sea un sistema de múltiples entradas-múltiples salidas con n integradores.

Supóngase también que hay r entradas $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ y m salidas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$.

Se definen las n salidas de los integradores como variables de estado: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$.

Entonces el sistema se puede describir mediante:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{aligned}$$

Control y Automatización

8

Universidad Rey Juan Carlos

Términos y Conceptos

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad \text{Ec. de Estado}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad \text{Ec. de Salida}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

Términos y Conceptos

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t)$$

A(t): Matriz de Estado
B(t): Matriz de Entrada
C(t): Matriz de Salida
D(t): Matriz de Transmisión Directa

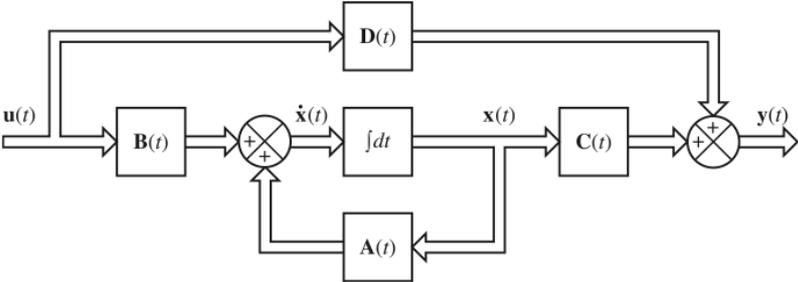
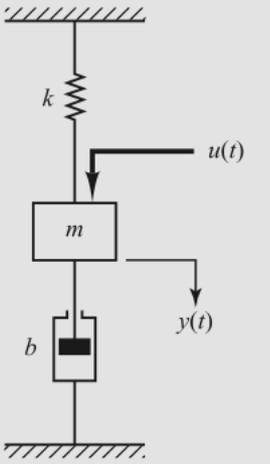


Diagrama de bloques del sistema de control lineal en tiempo continuo representado en el espacio de estados

Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

Modelo basado en Variables de Estado



$$M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + b \frac{\partial y}{\partial t} + ky = u(t)$$

Sistema de segundo orden, dos integradores:

$$x_1(t) = y(t);$$

$$x_2(t) = \frac{\partial y}{\partial t}$$

Por lo que convertimos la Ec. Diferencial en un sistema de Ec. de Orden 1:

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = x_2$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = \frac{-b}{M} x_2 - \frac{k}{M} x_1 + \frac{1}{M} u$$

Ejemplo 2.2.
"Ingeniería De Control Moderna" Ogata. 5ª Edición.

Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

Modelo basado en Variables de Estado

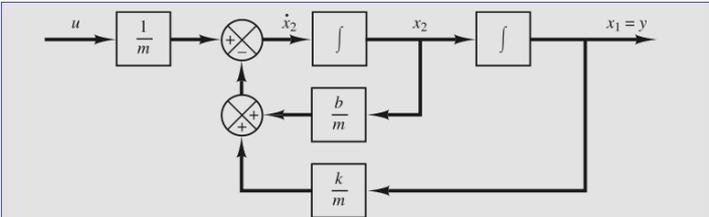
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}$$

$$y = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [1 \quad 0], \quad \mathbf{D} = 0$$




 Universidad Rey Juan Carlos

FDT- Ecuaciones en el espacio estados

Dadas las ecuaciones de estado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t), \end{aligned} \tag{10}$$

si les aplicamos $\mathcal{L}\{\circ\}$ obtenemos las ecuaciones algebraicas

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0^-) &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s), \end{aligned}$$

de donde $X(s) = (sI - A)^{-1}x(0^-) + (sI - A)^{-1}BU(s)$

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) + C(sI - A)^{-1}x(0^-).$$

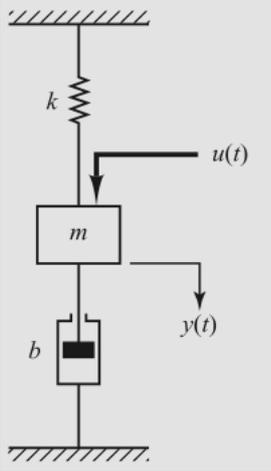
Así, $G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$ es la función transferencia del sistema (10).

Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

FDT- Ecuaciones en el espacio estados

13



Ejemplo 2.3.
"Ingeniería De Control Moderna "Ogata.
5ª Edición.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + D$$

$$G(s) = [1 \quad 0] \frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}} \begin{bmatrix} s + \frac{b}{m} & 1 \\ -\frac{k}{m} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$

Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

Representación en el espacio estado

14

Ecuaciones diferenciales escalares

- Función de excitación no contiene términos derivados

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u$$

Variables de estado

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \dot{y} \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned}$$

→

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u \end{aligned}$$

Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

Representación en el espacio estado

15

Ecuaciones diferenciales escalares

- Función de excitación no contiene términos derivados

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = u$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$


 Universidad Rey Juan Carlos

Representación en el espacio estado

16

Ecuaciones diferenciales escalares

- Función de excitación contiene términos derivados

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u$$

$$x_1 = y - \beta_0 u$$

$$x_2 = \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = \dot{x}_1 - \beta_1 u$$

$$x_3 = \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = \dot{x}_2 - \beta_2 u$$

$$\vdots$$

$$x_n = y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \dots - \beta_{n-2} \dot{u} - \beta_{n-1} u = \dot{x}_{n-1} - \beta_{n-1} u$$

Variables de estado

Donde:

$$\beta_0 = b_0$$

$$\beta_1 = b_1 - a_1 \beta_0$$

$$\beta_2 = b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0$$

$$\beta_3 = b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0$$

$$\vdots$$

$$\beta_{n-1} = b_{n-1} - a_1 \beta_{n-2} - \dots - a_{n-2} \beta_1 - a_{n-1} \beta_0$$


 Universidad Rey Juan Carlos

Representación en el espacio estado

17

Ecuaciones diferenciales escalares

- Función de excitación contiene términos derivados

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

Representación en el espacio estado

18

Formas canónicas

- Forma canónica controlable
- Forma canónica observable
- Forma canónica diagonal
- Forma canónica de Jordan

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \dot{y} + a_n y = b_0 u^{(n)} + b_1 u^{(n-1)} + \dots + b_{n-1} \dot{u} + b_n u$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

Control y Automatización



- Forma canónica controlable. Método de asignación de polos para el diseño de sistemas de control

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \quad b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \quad \cdots \quad b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$



- Forma canónica observable.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_n - a_n b_0 \\ b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \\ \vdots \\ b_1 - a_1 b_0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$


 Universidad Rey Juan Carlos

Representación en el espacio estado

21

- Forma canónica diagonal. (raíces distintas)

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} = b_0 + \frac{c_1}{s + p_1} + \frac{c_2}{s + p_2} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & & & 0 \\ & -p_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & -p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$


 Universidad Rey Juan Carlos

Representación en el espacio estado

22

- Forma canónica de Jordan. (raíces múltiples). Forma canónica diagonal de bloques para sistemas que no tiene polos distintos.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = b_0 + \frac{c_1}{(s + p_1)^3} + \frac{c_2}{(s + p_1)^2} + \frac{c_3}{s + p_1} + \frac{c_4}{s + p_4} + \dots + \frac{c_n}{s + p_n}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_1 & 1 & 0 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -p_1 & 1 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & -p_4 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -p_n & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u$$


 Universidad Rey Juan Carlos

Ejercicio Propuesto

23

Obtenga las representaciones en el espacio de estados en la forma canónica controlable, forma canónica observable y la forma canónica diagonal:

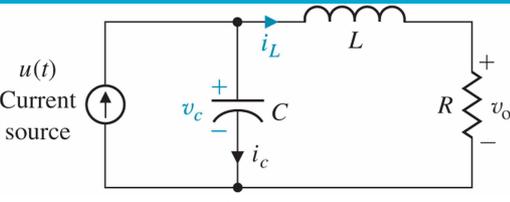
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

Modelo basado en Variables de Estado

24



Seleccinamos las siguiente variables:
 $x_1 = v_c(t)$
 $x_2 = i_L(t)$,

$$E = (1/2)Li^2_{L+} + (1/2)Cv^2_c$$

$$i_c = C \frac{dv_c}{dt} = u(t) - i_L \quad (\text{Kirchoff para corriente en el nodo})$$

$$L \frac{di_L}{dt} = -Ri_L + v_c \quad (\text{Kirchoff para tensi3n en la malla de la derecha})$$

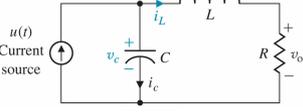
$$v_o = Ri_L(t) \quad (\text{Salida del Sistema})$$

Control y Automatizaci3n


 Universidad Rey Juan Carlos

Modelo basado en Variables de Estado

25



$i_c = C \frac{dv_c}{dt} = u(t) - i_L$ (Kirchoff para corriente en el nodo)
 $L \frac{di_L}{dt} = -Ri_L + v_c$ (Kirchoff para tensión en la malla de la derecha)
 $v_o = Ri_L(t)$ (Salida del Sistema)

$x_1 = v_c(t)$
 $x_2 = i_L(t)$

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2$$

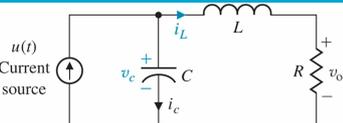
$$y_1 = v_o(t) = Rx_2$$

Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

Grafos de Flujo y Diagramas de Bloques

26



Procedimiento para eludir la formulación matricial.:

1. Elección de Variables
2. Construir sistema de Ec. De Orden 1
3. Transf. De Laplace
4. Dibujar Grafo o Diagrama de bloques.

$\dot{x}_1 = -\frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}u(t)$
 $\dot{x}_2 = \frac{1}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2$
 $v_o(t) = Rx_2$

\Rightarrow
 $sx_1(s) = -\frac{1}{C}x_2(s) + \frac{1}{C}u(s)$
 $sx_2(s) = \frac{1}{L}x_1(s) - \frac{R}{L}x_2(s)$
 $v_o(s) = Rx_2(s)$

\Rightarrow
 $x_1(s) = -\frac{1}{sC}x_2(s) + \frac{1}{sC}u(s)$
 $x_2(s) = \frac{1}{sL}x_1(s) - \frac{R}{sL}x_2(s)$
 $v_o(s) = Rx_2(s)$

Control y Automatización

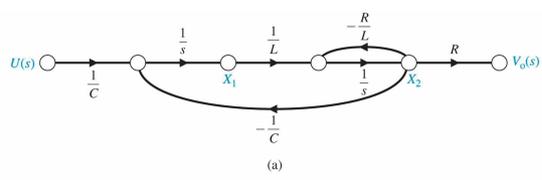

27

Grafos de Flujo y Diagramas de Bloques

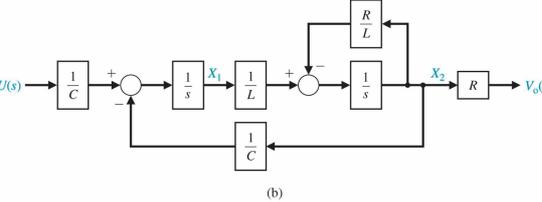
$$x_1(s) = -\frac{1}{sC} x_2(s) + \frac{1}{sC} u(s)$$

$$x_2(s) = \frac{1}{sL} x_1(s) - \frac{R}{sL} x_2(s)$$

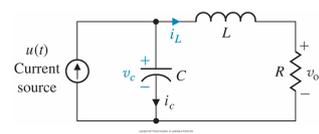
$$v_0(s) = R x_2(s)$$



(a)



(b)



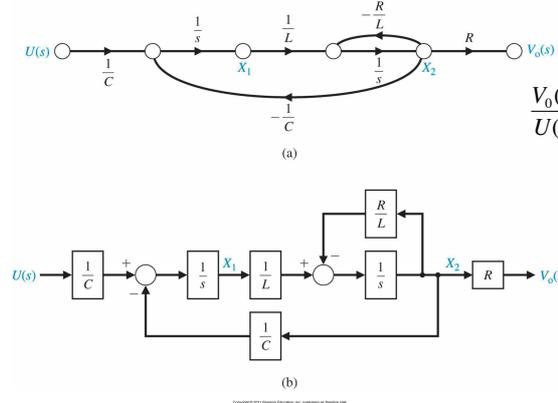
Control y Automatización


28

Grafos de Flujo y Diagramas de Bloques

Se obtiene la Func. De Transf. aplicando:

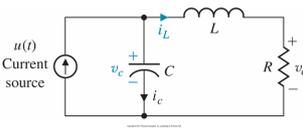
- o bien la Fórmula de Mason
- o bien álgebra de bloques
- (o bien álgebra matricial)



(a)

(b)

$$\frac{V_0(s)}{U(s)} = \frac{\frac{R}{LCs^2}}{1 + \frac{R}{Ls} + \left(\frac{1}{LCs^2}\right)} = \frac{\frac{R}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \left(\frac{1}{LC}\right)}$$

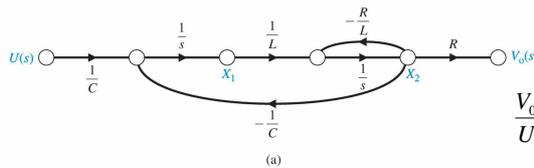


Control y Automatización


29

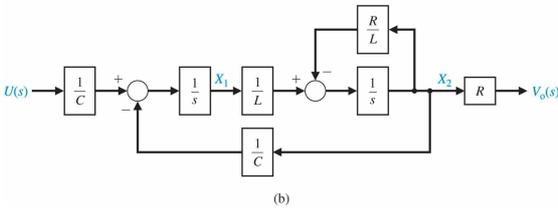
Grafos de Flujo y Diagramas de Bloques

Y ahora lo opuesto:
Obtener la ec. Diferencial de estado a partir de la Función de Transferencia.

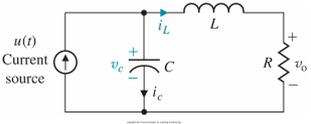


(a)

$$\frac{V_0(s)}{U(s)} = \frac{\frac{R}{LCs^2}}{1 + \frac{R}{Ls} + (\frac{1}{LCs^2})} = \frac{\frac{R}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + (\frac{1}{LC})}$$



(b)



Control y Automatización


30

Obtención del Grafo a partir de la FT.

Sea la Función de Transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Multiplicando numerador y denominador por s^{-n} :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^{-(n-m)} + b_{m-1} s^{-(n-m+1)} + \dots + b_1 s^{-(n-1)} + b_0 s^{-n}}{1 + a_{n-1} s^{-1} + \dots + a_1 s^{-(n-1)} + a_0 s^{-n}}$$

Queda una expresión que coincide con la Fórmula de Mason:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_K P_k \Delta_k}{\Delta}$$

Cuando todos los lazos tocan todas las trayectorias:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_K P_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{\text{Suma de todos los factores de la trayectoria de avance}}{\text{1-factores de los lazos de realimentación}}$$

Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

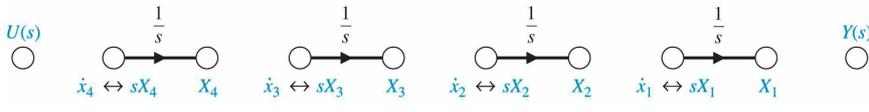
31

Obtención del Grafo a partir de la FT.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0}{s^4 + a_3s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0} \quad \text{Ec. 3.37}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0s^{-4}}{1 + a_3s^{-1} + a_2s^{-2} + a_1s^{-3} + a_0s^{-4}}$$

Cuatro variables de estado: x_1, x_2, x_3, x_4



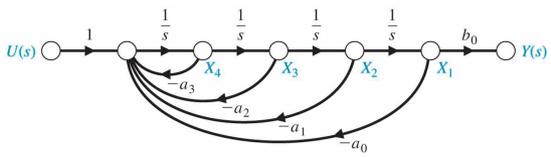
Copyright © 2011 Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall

Control y Automatización

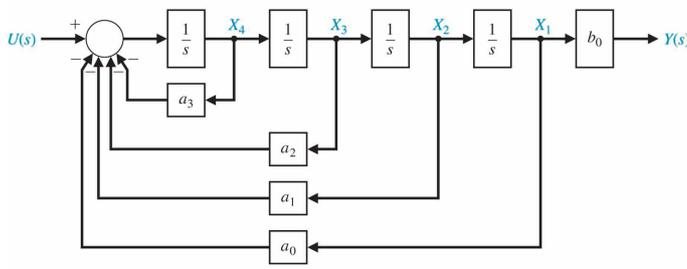

 Universidad Rey Juan Carlos

32

Obtención del Grafo a partir de la FT.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0s^{-4}}{1 + a_3s^{-1} + a_2s^{-2} + a_1s^{-3} + a_0s^{-4}}$$


(a)



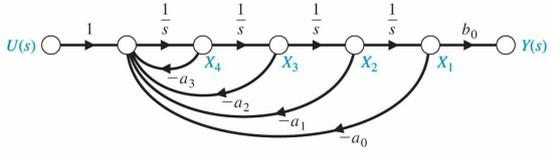
(b)

Copyright © 2011 Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall

Control y Automatización


Universidad Rey Juan Carlos
33

Deducción de la Ec. Diferencial

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0 s^{-4}}{1 + a_3 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_1 s^{-3} + a_0 s^{-4}}$$


$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 - a_3 x_4 + u \\ y &= b_0 x_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{y}{b_0} \\ x_2 &= \dot{x}_1 = \frac{\dot{y}}{b_0} \\ x_3 &= \ddot{x}_1 = \frac{\ddot{y}}{b_0} \\ x_4 &= \overset{\cdot}{\ddot{x}}_1 = \frac{\overset{\cdot}{\ddot{y}}}{b_0} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

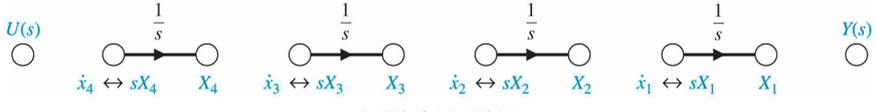
$$\frac{d^4}{dt^4} y(t) + \frac{a_3}{b_0} \frac{d^3}{dt^3} y(t) + \frac{a_2}{b_0} \frac{d^2}{dt^2} y(t) + \frac{a_1}{b_0} \frac{d}{dt} y(t) + \frac{a_0}{b_0} y(t) = u(t)$$

Control y Automatización


Universidad Rey Juan Carlos
34

Obtención del Grafo a partir de la FT.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad \text{Ec. 3.38}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_3 s^{-1} + b_2 s^{-2} + b_1 s^{-3} + b_0 s^{-4}}{1 + a_3 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_1 s^{-3} + a_0 s^{-4}}$$


Copyright © 2011 Pearson Education, Inc., publishing as Prentice Hall

Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

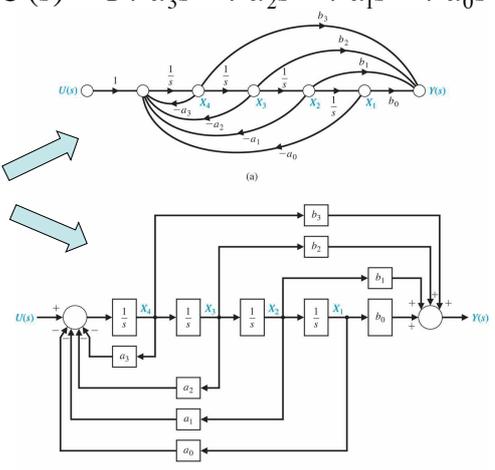
Obtención del Grafo a partir de la FT.

35

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_3 s^{-1} + b_2 s^{-2} + b_1 s^{-3} + b_0 s^{-4}}{1 + a_3 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_1 s^{-3} + a_0 s^{-4}}$$

Fig. 3.8

Forma Canónica de la Variable de Fase



Control y Automatización


 Universidad Rey Juan Carlos

Deducción de la Ec. Diferencial

36

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_3 s^{-1} + b_2 s^{-2} + b_1 s^{-3} + b_0 s^{-4}}{1 + a_3 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_1 s^{-3} + a_0 s^{-4}} \frac{Z(s)}{Z(s)}$$

$$Y(s) = (b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0) Z(s)$$

$$U(s) = (s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0) Z(s)$$

Transf. Laplace Inversa:

$$y(t) = b_3 \frac{d^3 z}{dt^3} + b_2 \frac{d^2 z}{dt^2} + b_1 \frac{d z}{dt} + b_0 z$$

$$u(t) = \frac{d^4 z}{dt^4} + a_3 \frac{d^3 z}{dt^3} + a_2 \frac{d^2 z}{dt^2} + a_1 \frac{d z}{dt} + a_0 z$$

Control y Automatización


Universidad Rey Juan Carlos
Deducción de la Ec. Diferencial
37

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_3s^{-1} + b_2s^{-2} + b_1s^{-3} + b_0s^{-4}}{1 + a_3s^{-1} + a_2s^{-2} + a_1s^{-3} + a_0s^{-4}} \frac{Z(s)}{Z(s)}$$

□ = New nodes

Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. publishing as Prentice Hall

Control y Automatización


Universidad Rey Juan Carlos
Deducción de la Ec. Diferencial
38

□ = New nodes

Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. publishing as Prentice Hall

Control y Automatización

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 - a_3x_4 + u \\ y &= b_0x_1 + b_1x_2 + b_2x_3 + b_3x_4 \end{aligned}$$

$$y(t) = CX$$

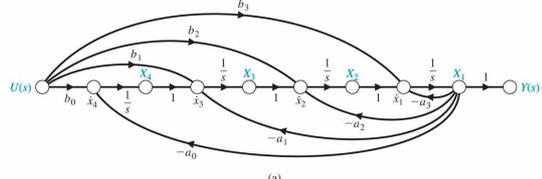
$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

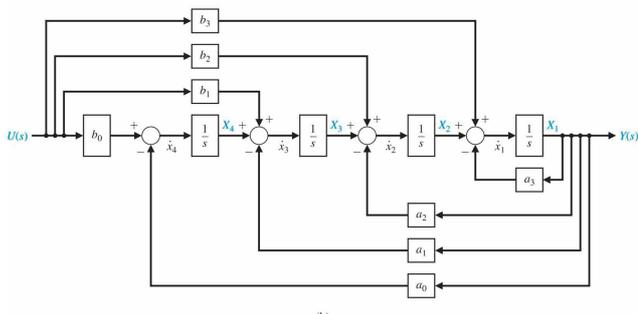
$$y = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$


Universidad Rey Juan Carlos
39

Forma Canónica de Entrada Prealimentada

La función de transferencia es la misma, aunque las variables de estado son diferentes.





Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. publishing as Pearson Hall

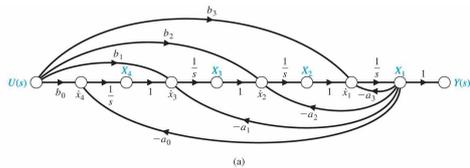

Universidad Rey Juan Carlos
40

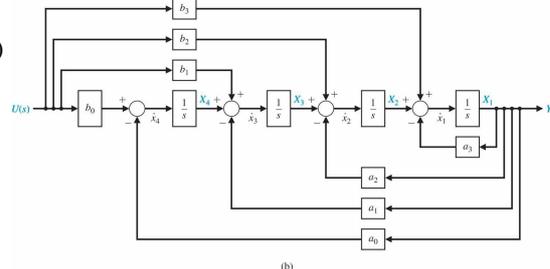
Forma Canónica de Entrada Pre-alimentada

$\dot{x}_1 = -a_3x_1 + x_2 + b_3u$
 $\dot{x}_2 = -a_2x_1 + x_3 + b_2u$
 $\dot{x}_3 = -a_1x_1 + x_4 + b_1u$
 $\dot{x}_4 = -a_0x_1 + b_0u$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} u(t)$$





Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. publishing as Pearson Hall

Control y Automatización

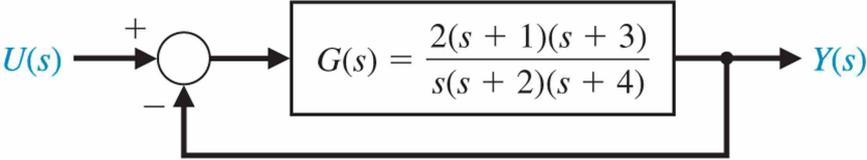

 Universidad Rey Juan Carlos

Ejercicio Propuesto

41

Dado el siguiente lazo de realimentación, calcula:

- La Función de transferencia.
- El grafo de flujo y diagrama de bloques según la Forma canónica de la variable de fase.
- El grafo y el diagrama pre-alimentado
- La Ec. Diferencial de estado (forma matricial)
- La ecuación diferencial



Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. publishing as Prentice Hall

Control y Automatización

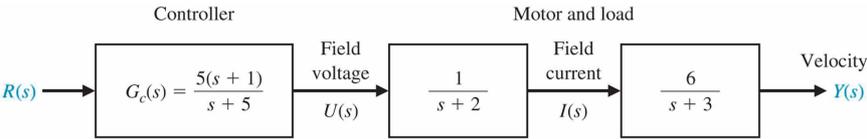

 Universidad Rey Juan Carlos

Ejercicio propuesto

42

Dado el siguiente lazo abierto de control, calcula:

- La Función de transferencia.
- El grafo de flujo y diagrama de bloques según la Forma canónica de la variable de fase.
- El grafo y el diagrama pre-alimentado
- La Ec. Diferencial de estado (forma matricial)
- La ecuación diferencial
- Resuelve la Ec. Diferencial mediante Transf. Laplace
- Calcula el comportamiento en el estacionario



Copyright © 2011 Pearson Education, Inc. publishing as Prentice Hall

Control y Automatización